



Løsningsskisse til ST1101 / ST6200 Sannsynlighetsregning
Torsdag 29. mai 2008

Oppgave 1

a) Uavhengige kast.

X_1 = Resultat for første terning, X_2 = Resultat for andre terning.

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 7) &= P(X_1 = 1, X_2 = 6) + P(X_1 = 2, X_2 = 5) + \dots + P(X_1 = 6, X_2 = 1) \\ &= 0,5^2 + 5 \times 0,1^2 = \underline{\underline{0,30}} \end{aligned}$$

b) $P(X_1 = X_2) = P(1,1) + P(2,2) + \dots + P(6,6) = 2 \times 0,5 \times 0,1 + 4 \times 0,1^2 = \underline{\underline{0,14}}$

Hendelse A : Sekser, og B : Første terning. Skal finne $P(B|A)$.

$$P(B) = 0,5, \quad P(A|B) = 0,1, \quad P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = 0,30$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0,1 \times 0,5}{0,3} = \underline{\underline{0,167}}$$

Oppgave 2

X = Antall tester for strategi B .

a) Sannsynlighetsfordeling:

x	$P(X=x)$
1	$(1-p)^k$
$1+k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X) = (1-p)^k + (1+k) \left[1 - (1-p)^k \right] = \underline{\underline{1+k-k(1-p)^k}}$$

b) $f(k) = \underline{\underline{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{-k}}}$

La Y være antall tester for n personer, hvor $n = m \times k$

$$E(Y) = m \times E(X) = \frac{n}{k} \left[1+k-k(1-p)^k \right] = \underline{\underline{n \left[1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k \right]}}$$

Oppgave 3

X = Forsinkelse.

a) Finn k . $\int_0^{\infty} kxe^{-2x} dx = k \frac{1}{2^2} = \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{k=4}}$

$$E(X) = \int_0^{\infty} xg(x) dx = \int_0^{\infty} 4x^2 e^{-2x} dx = 4 \frac{2}{2^3} = \underline{\underline{1}}$$

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} 4xe^{-2x} dx = \dots \text{ (delvis integrasjon) } = 5e^{-4} \approx \underline{\underline{0,09}}$$

b) V = antall dager forsinket mer enn 2 min. \sim Binomisk ($n = 22, p = 0,09$)

Antagelser: Uavhengige dager og konstant p for alle dagene.

$$P(V \geq 2) = 1 - P(V \leq 1) = 1 - [P(V = 0) + P(V = 1)] = 1 - (1-p)^{22} - 22p(1-p)^{21} = \underline{\underline{0,6012}}$$

Bruker normaltilnærmingen:

$$P(V > 30) = 1 - P(V \leq 30) \approx 1 - P\left(Z \leq \frac{30 + 0.5 - 220 \times 0,09}{\sqrt{220 \times 0,09 \times (1 - 0,09)}}\right) = 1 - P(Z \leq 2,52) = \underline{\underline{0,0059}}$$

c) Y = Antall minutter på stasjonen.

$x = 2 \Rightarrow f(y | x = 2) = e^{-y}$ for $y > 0$, dvs. eksponensialfordelingen med

parameter lik 1. $E(Y | x = 2) = \underline{\underline{1}}$

$$f(x, y) = f(y | x) f(x) = \left(\frac{x}{2}\right) e^{-xy/2} 4xe^{-2x} = \underline{\underline{2x^2 e^{-x(y/2+2)}}} \text{ for } x > 0, y > 0.$$

$$h(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x(y/2+2)} dx = 2 \frac{2}{(y/2+2)^3} = \underline{\underline{32(y+4)^{-3}}} \text{ for } y > 0.$$

Oppgave 4

X = Antall kast før første kron, dvs. X er geometrisk fordelt.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^t\right)^k$$

Har at $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ for $0 < r < 1$

$$\Rightarrow M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^t\right)^k - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^t} - 1 = \underline{\underline{\frac{e^t}{2 - e^t}}}$$

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}, \quad M_X^{(2)}(t) = \frac{2e^t(2+e^t)}{(2-e^t)^3}$$

$$E(X) = M_X^{(1)}(t=0) = \underline{\underline{2}}$$

$$E(X^2) = M_X^{(2)}(t=0) = 6 \Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6 - 2^2 = \underline{\underline{2}}$$